



## تأثیر مدل دینامیکی و نحوه اندازه‌گیری در مسئله تخمین حرکت نسبی ماهواره‌ها با استفاده از فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر

نویسندگان: مجید بختیاری<sup>۱\*</sup>، احسان عباسعلی<sup>۲</sup> کامران دانشجو<sup>۳</sup>

۱- استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت، تهران

۲- دانشجو کارشناسی ارشد، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران

۳- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶-۱۳۱۱۴، bakhtiari\_m@iust.ac.ir

### چکیده

در مقاله حاضر طراحی تخمین‌گر و آنالیز عملکردی آن در مساله حرکت نسبی ماهواره‌ها، بر پایه‌ی الگوریتم کالمن مکعبی کوادریچر مدنظر خواهد بود. مسئله تخمین به چهار بخش تقسیم می‌گردد: مدل دینامیکی، الگوریتم فیلترینگ، مدل مشاهده‌گر و سنسورها به عنوان ابزارهای اندازه‌گیری. دقت و نحوه عملکرد هریک از زیرسیستم‌ها و همچنین نحوه‌ی ارتباط آن‌ها می‌تواند تأثیر مهمی در تخمین صورت گرفته ایفا نماید. در اینجا تحلیل عملکرد و پارامترهای موثر بر تخمین حرکت نسبی ماهواره‌ها با بکارگیری مدل‌های دینامیکی، مدل‌های اندازه‌گیری و دقت‌های اندازه‌گیری مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این مطالعه طراحی تخمین‌گر برای سه مدل دینامیکی صورت گرفته است: مدل دینامیکی سدویک، مدل کلوسی-ویلشیر و مدل کلوسی-ویلشیر همراه با بایاس. مدل همراه با بایاس برای جبران اثرات غیرخطی موجود در مدل دینامیکی بکار گرفته شده است. همچنین از دو مدل اندازه‌گیری خطی و غیرخطی به منظور نمایش اثرات مدل مشاهده‌گر در مسئله تخمین استفاده شده است. در مدل اندازه‌گیری خطی، سنسورها قادر به استخراج مولفه‌های حرکت نسبی خواهند بود. همچنین، مدل اندازه‌گیری غیرخطی با استفاده از مشاهدات حاصل شده از رنج و مولفه‌های اندازه‌گیری راداری مورد توجه قرار گرفته است. اثر فرکانس اندازه‌گیری بر عملکرد تخمین‌گر توسط تغییر در بازه‌های زمانی ورود مشاهدات جدید مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر آن، اثر دقت سنسورهای بکار گرفته شده در فرآیند تخمین با تغییر نویز اندازه‌گیری بررسی شده است. در این کار سناریوها و شبیه‌سازی‌های مختلفی برای نشان دادن اثر عوامل ذکر شده و مقایسه‌ی این عوامل بر خطاهای ایجاد شده در تخمین‌گر اجرا شده است.

**کلید واژگان:** فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر، حرکت نسبی ماهواره‌ها، تخمین نسبی، آنالیز عملکرد فیلترینگ غیرخطی

### *The effect of dynamics and measurement models on state estimation of relative motion of satellites by cubature quadrature Kalman filter*

Majid Bakhtiari<sup>1\*</sup>, Ehsan Abbasali<sup>2</sup>, Kamran Daneshjou<sup>1</sup>

1- School of Advanced Technologies, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

2- Department of New Sciences & Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.

3- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 16846-13114 Tehran, Iran, [bakhtiari\\_m@iust.ac.ir](mailto:bakhtiari_m@iust.ac.ir)

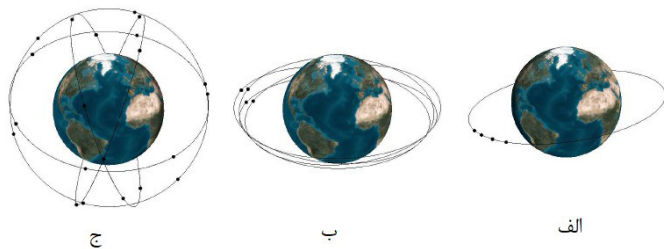
### Abstract

In this paper the relative state estimation of satellites motion in formation flying is investigated based on cubature quadrature Kalman filter. The state estimation problem is divided to four subsystems: Dynamic model, filtering algorithm, measurement model, and sensor subsystem. The accuracy and performance of each of subsystems, as well as its relations, can play an important role in designing of state estimation system. Here, the parameters that affect the relative estimation of the satellites motion such as dynamic models, measurement models and different sensor measurement accuracy are investigated. In this study the estimator is designed for three kinds of dynamic models: Clohessy-Wiltshire, Clohessy-Wiltshire with bias, and Sedwick model. Clohessy-Wiltshire with bias model is used to compensate the un-model nonlinear part of dynamic model. The linear and nonlinear measurement models is applied to show their effects on the state estimation accuracy. In the linear measurement model, the sensors will be able to measure relative motion components and in the nonlinear measurement model, the radar observation component: range, azimuth and elevation are taken into account. The effect of frequency of sensor observation on estimator performance is studied by changing the timescales entering new sensor data. Also, the effect of sensor accuracy in the estimation process is investigated by changing the measurement noise. In this work different scenarios and simulations are implemented to illustrate and compare the effects of these factors on the occurred errors in the estimator system.

### Keywords

Cubature Quadrature Kalman Filter, Satellite Relative Motion, Relative State Estimation, Performance Analysis of Nonlinear Filtering

اشاره نمود. آرایش زنجیره‌ای با حرکت چند ماهواره بر روی یک مسیر شکل می‌گیرد. این ماهواره‌ها با فواصل مشخص از هم قرار دارند تا هدف مشخصی را در فواصل زمانی معین یا از زوایای مختلف مورد بررسی و رصد قرار دهند. ماهواره‌های زنجیره‌ای به طور خاص برای کاربردهای هواشناسی و زیست محیطی به مانند اطلاع از روند پیشرفت آتش‌سوزی، شکل ابرها و ایجاد تصاویر سه‌بعدی از طوفان مورد استفاده قرار می‌گیرد. باید دانست که از لحاظ مدل‌سازی، آرایش پرواز زنجیره‌ای حالت کلی تری نسبت به سایر دسته‌بندی‌ها دارد. آرایش خوشه‌ای با وجود چند ماهواره در فواصل مشخص نسبت به هم شکل می‌گیرد. این آرایش برای تصویربرداری با وضوح بالا و نقشه‌برداری زمین مناسب است. در منظومه ماهواره‌ای توصیف گر ارتباط چندین ماهواره، که در فواصل قابل توجهی از هم قرار دارند، می‌باشد. این ماهواره‌ها معمولاً در صفحات مداری جدا از هم حرکت می‌کنند و به طور معمول در اطراف زمین به طور منظم پخش هستند.



شکل ۱ انواع آرایش پرواز.

(الف) آرایش زنجیره‌ای (ب) آرایش خوشه‌ای (ج) منظومه ماهواره‌ای

مشهورترین مدل خطی در حرکت نسبی ماهواره‌ها، مدل هیل-کلوسی می‌باشد که یک حل تحلیلی را برای یک مدار مرجع دایروی و غیراغتشاشی ارائه می‌دهد [۱۱]. کارتر یک مطالعه جامع بر روی مدل‌های حرکت نسبی در مختصات‌های مستقیم الخط و منحنی الخط، مدل‌های خطی شده ارائه شده و مدار مرجع دایره انجام داده است [۱۲]. کارتر یک روش ساده‌تر را برای مرحله پایانی عمل لنگرگیری بدون اعمال اغتشاش بدست آورده است. اسویگارت و سدویک [۱۳] یک مدل جدید (مدل S-S) را برای حل تحلیلی حرکت در مختصات منحنی الخط برای مدار مرجع دایره ارائه داده است. آن‌ها در این روش از ترم میانگین زمانی به جای استفاده از توزیع کامل نیرو استفاده کرده‌اند [۱۳]. اما اشکال کار اینجاست که شرایط اولیه برای کم شدن میزان خطا در این فرمول‌بندی متفاوت از شرایط اولیه در معادلات غیرخطی می‌باشد [۱۴]. برای کاهش میزان خطا در مدل سدویک، روبرت [۱۵] موفق شد مدل فوق را با استفاده از گرادیان نیروی اغتشاشی به صورت یک سری از معادلات خطی بهبود ببخشد. ایزو

ناوبری نسبی میان ماهواره‌ها یکی از ابزارهای لازم برای انجام ماموریت‌های فضایی فعلی و آینده به شمار می‌آید. از جمله این ماموریت‌ها می‌توان به پرواز دسته جمعی، پهلوگیری و یکپارچه‌سازی خودکار اشاره کرد. انجام صحیح اینگونه ماموریت‌ها وابسته به داشتن اطلاعات دقیق از فاصله و سرعت نسبی مابین فضاپیماها و ماهواره‌ها خواهد بود. در بسیاری از موارد رادار متصل بر ماهواره با بدست آوردن فاصله نسبی، زاویه فراز و آزیموت، اطلاعات لازم را برای تعیین موقعیت و سرعت نسبی را فراهم می‌نماید [۱].

الگوریتم‌های تخمین غیرخطی به مانند فیلتر کالمن بی‌بو، [۲] و [۳] برای بهبود عملکرد و افزایش پایداری فیلتر کالمن توسعه یافته مورد استفاده قرار گرفته است. فیلتر کالمن بی‌بو برپایه‌ی تئوری تبدیل بی‌بو شکل گرفته است. فیلتر تفاضلات مرکزی [۴] نیز بر اساس نظریه‌ی میان‌یابی پایه‌ریزی شده‌است و دارای ساختاری مشابه با کالمن بی‌بو می‌باشد. فیلتر کالمن مکعبی [۵] نیز از قانون مکعبی شعاعی-کروی بهره می‌برد و دارای دقت تقریب تا مرتبه سه می‌باشد. فیلترهای کالمن بی‌بو و مکعبی به سادگی قابل پیاده‌سازی می‌باشند. به علاوه، در حالت‌هایی که سیستم دینامیکی دارای عوامل غیرخطی بزرگ، حدس اولیه نامناسب و اندازه‌گیری غیرخطی باشد، الگوریتم‌ها مذکور دارای دقت و پایداری مناسب‌تری نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته خواهند بود [۶].

پیاده‌سازی اینگونه از فیلترها در حالت واقعی به تعداد نقاط مورد استفاده [۷] در این فیلترها وابسته است. انتخاب تعداد نقاط کافی یک اصل مهم برای رسیدن به دقت مناسب و داشتن حجم مناسب پردازش‌ها برای پیاده‌سازی در حالت زمان واقعی خواهد بود. در فیلتر کالمن مکعبی-کوادریچر، نیاز به جداسازی کلوسی در هر مرحله وجود خواهد داشت. همچنین تعداد نقاط مورد استفاده از آن با افزایش بعد سیستم به صورت خطی افزایش پیدا می‌نماید. این امر باعث کم شدن بار محاسباتی پردازشگرها و مقاوم بودن فیلتر در برابر عوامل غیرخطی و غیرگوسی خواهد شد. همچنین، سرعت همگرایی فیلتر کالمن مکعبی-کوادریچر از فیلتر کالمن بی‌بو بیش‌تر می‌باشد [۸]. آرایش ماهواره‌ای متشکل از گروهی از ماهواره‌هاست که در فواصل نزدیک به هم به نسبت فاصله از مرکز زمین، برای انجام ماموریتی با هدف مشترک در حال پروازند. کارآمدی و موثر بودن آرایش پرواز در چند سال گذشته ثابت شده است. تحقیقات حاضر بر این مساله تاکید دارد که چگونه می‌توان پرواز آرایش‌مند ماهواره‌ها را به صورت کارا تر و دقیق‌تر اجرا نمود، چگونه می‌توان سیستمی با قابلیت اطمینان بالاتر ایجاد کرد و چگونه می‌توان یک سیستم با مقاومت بالاتر نسبت به اغتشاشات محیطی و خود عملگری بیشتری را ایجاد نمود [۹]، [۱۰]. از معروف‌ترین مدل‌های آرایش ماهواره‌ای می‌توان به آرایش پرواز زنجیره‌ای، آرایش پرواز خوشه‌ای و منظومه ماهواره‌ای

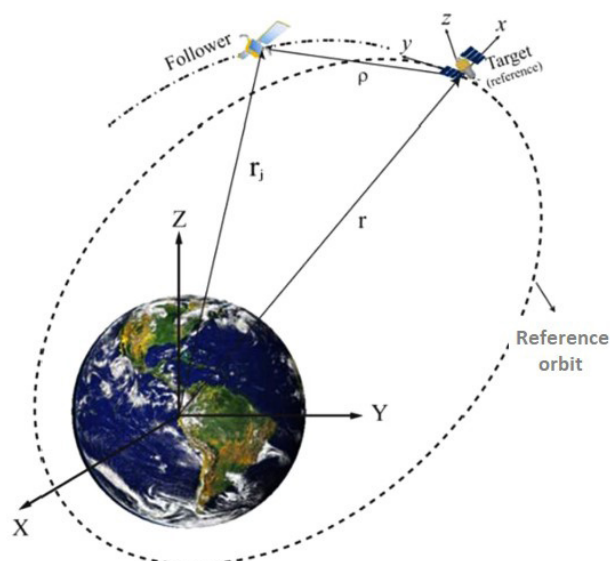
[۱۶]، یک روش جدید (مدل S-P) را برای بدست آوردن حرکت نسبی در مدار مرجع دایره ارائه داد. در کل تمام ماموریت‌های آرایش پرواز درگیر این مسئله هستند که چگونه می‌توان یک مدل دقیق‌تر را برای توصیف حرکت نسبی ماهواره‌ها، جهت بکارگیری در سیستم‌های هدایت، ناوبری و کنترل استخراج نمود. مدل دینامیکی غیرخطی، کاملترین مدل برای توصیف اینگونه از حرکت‌ها است. اما استفاده از یک مدل غیرخطی برای طراحی و پیاده‌سازی یک الگوریتم ناوبری یا سیستم کنترلی دارای معایبی است. بنابراین بیشترین تلاش محققان در بکارگیری انواع مختلف سیستم‌های خطی در این گونه مسائل است.

مسئله تخمین خود به چهار زیرسیستم تقسیم می‌گردد: زیرسیستم فیلترینگ، زیرسیستم مدل دینامیکی، زیرسیستم مدل مشاهده‌گر و زیرسیستم سنسورها و ابزارهای اندازه‌گیری. دقت و نحوه عملکرد هر یک از زیرسیستم‌ها و همچنین نحوه ارتباط آن‌ها

## ۲) حرکت نسبی ماهواره‌ها

در اینجا دو دستگاه مختصات مختلف که در این مطالعه استفاده شده است مورد بررسی قرار می‌گیرد [۱۷]:

- مختصات ECI که یک چارچوب زمین ثابت<sup>۱</sup> است و همراه با زمین نمی‌چرخد. مرکز این مختصات در مرکز زمین قرار دارد و صفحه XY آن صفحه استوای زمین و محور Z آن به سمت قطب شمال می‌باشد.
- مختصات افقی- عمودی محلی، (مختصات LVLH<sup>۲</sup>) یک چارچوب در حال چرخش است که بر روی مدار مرجع قرار داده میشود. محور X در جهت خط واصل مرکز زمین به ماهواره اصلی است و محور Z بر صفحه مداری عمود است.



شکل ۲ طرح شماتیک حرکت نسبی ماهواره‌ها، و نمایش دستگاه‌های مختصات ECI و LVLH

1 Earth Centered Inertial

2 Local-vertical Local-horizontal

با یکدیگر می‌تواند تاثیر مهمی در تخمین صورت گرفته ایفا نماید. در این مطالعه سعی شده است که تاثیر هر یک از زیرسیستم‌ها بر دقت تخمین‌گر طراحی شده مورد بررسی قرار گیرد. در بخش زیرسیستم دینامیکی از سه مدل دینامیکی سدویک، کلوسی و پلشیر و مدل همراه با بایاس استفاده شده است. در بخش زیرسیستم مدل مشاهده‌گر از دو مدل اندازه‌گیری خطی و غیرخطی به منظور نمایش اثرات آن‌ها در مسئله تخمین استفاده شده است. همچنین اثر فرکانس اندازه‌گیری توسط تغییر در بازه‌های زمانی ورود مشاهدات جدید در زیر سیستم سنسور مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در زیرسیستم فیلترینگ از یک الگوریتم مناسب و مطرح با نام فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر استفاده شده است. در ادامه، ابتدا مدل‌های دینامیکی مذکور ارائه شده، سپس الگوریتم فیلترینگ و مدل‌های مشاهده‌گر معرفی می‌گردند. در انتها اثرات عوامل مختلف بر مسئله تخمین نسبی در آرایش پرواز مورد توجه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

## ۲-۱) معادلات کلوسی- وپلشی

فرم کلی معادلات حرکت نسبی بدون در نظرگیری اغتشاشات به صورت زیر خواهد بود [۱۸]:

$$\ddot{\rho} = \frac{d^2 \rho}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d\rho}{dt} + \omega \times (\omega \times \rho) + \dot{\omega} \times \rho \quad (1)$$

که در آن  $\rho = [x \quad y \quad z]^T$  بردار موقعیت نسبی می‌باشد. همچنین سرعت زاویه‌ای مختصات محلی نسبت به مختصات اینرسیال به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\omega = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_0] \quad (2)$$

با جایگزین کردن معادله (۲) در معادله (۱)، مولفه‌های حرکت نسبی ماهواره پیرو نسبت به ماهواره اصلی بدست می‌آیند:

$$\ddot{x} - 2\dot{\theta}_0 \dot{y} - \dot{\theta}_0 y - 2\dot{\theta}_0^2 x = \frac{\mu}{r_0^2} - \frac{\mu(r_0 + x)}{[(r_0 + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

$$\ddot{y} - 2\dot{\theta}_0 \dot{x} - \dot{\theta}_0 x - \dot{\theta}_0^2 y = -\frac{\mu y}{[(r_0 + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r_0^2}$$

معادله فوق برای هر مدار غیر اغتشاشی صدق می‌کند. اگر فرض شود که ماهواره اصلی بر روی مدار دایره در حال حرکت است، این معادلات ساده‌تر می‌گردد. در مدار مرجع دایره،  $\dot{\theta}_0$  برابر با مقدار ثابت  $n_0 = \sqrt{\mu/r_0}$  می‌گردد و  $\dot{\theta}_0 = 0$  می‌شود. همچنین شعاع دایره مرجع همواره ثابت و بدون تغییر خواهد ماند. با بسط دادن

معادله‌ی بخش اضافه شده برای جبران نقصان مدل دینامیکی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\ddot{\beta} = 0 \quad (6)$$

### ۲-۳) معادلات حرکت نسبی سدویک

معادلات استخراج شده توسط سدویک [۱۱] شبیه معادلات حرکت کلوسی بود و مانند آن تنها برای مدار مرجع دایروی معتبر خواهد بود. معادلات سدویک این امکان را فراهم می‌کند که اثر نیروی اغتشاشی  $J_2$  بر روی مدار ماهواره مورد بررسی قرار گیرد. بنابراین، برای بدست آوردن حرکت نسبی بین دو ماهواره و با در نظر گرفتن نیروی اغتشاش  $J_2$ ، می‌بایست حرکت دو ماهواره را نسبت به یک نمودار مرجع در نظر گرفت و سپس مقدار بدست آمده را از هم کم نمود.

$$\ddot{x} - 2n_0 c \dot{y} - (5c^2 - 2)n_0^2 x = -3n_0^2 J_2 (R_e^2 / r_0) \times \left\{ \frac{1}{2} - [3 \sin^2 i_0 \sin^2 kt / 2] - [(1 + 3 \cos 2r_0) / 8] \right\} \quad (7)$$

$$\ddot{y} + 2n_0 c \dot{x} = -3n_0^2 J_2 (R_e^2 / r_0) \sin^2 i_0 \sin^2 kt \cos kt$$

$$\ddot{z} - q^2 y = 2lq \cos(qt + \varphi)$$

که در آن بیان کننده مختصات در دستگاه نسبی و شعاع مدار دایره مرجع زاویه میل مدار مرجع می‌باشد. که در آن:

$$c = \sqrt{1 + 3J_2 (R_e / r_0)^2 (1 + 3 \cos 2i_0)} \quad (8)$$

ماتریس کواریانس سیستم و ماتریس کواریانس اندازه‌گیری با و نشان داده می‌شود.

### ۳-۲) الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر

در این بخش الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر به ترتیب زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

#### ۱) راه اندازی فیلتر

- انجام حدس اولیه متغیرهای حالت  $\hat{x}_{0|0} = E\{x_{0|0}\}$  و ماتریس کواریانس  $P_{0|0} = S_{0|0} S^T_{0|0} E\{(x_{0|0} - \hat{x}_{0|0})(x_{0|0} - \hat{x}_{0|0})^T\}$
- محاسبه نقاط مکعبی کوادریچر  $\xi_j$  و وزن‌های متناظر با این نقاط  $W_j$

#### ۲) مرحله پیش بینین

- جداسازی چلوسکی برای کواریانس  $P_{k|k} = S_{k|k} S^T_{k|k} \quad (14)$
- بدست آوردن نقاط مکعبی کوادریچر  $\chi_{j,k+1|k} = S_{k|k} \xi_j + x_{k|k} \quad (15)$
- به‌روزرسانی نقاط مکعبی کوادریچر  $\chi_{j,k+1|k} = f(\chi_{j,k|k}) \quad (16)$

سمت راست معادلات و چشم‌پوشی از جملات با مرتبه بالا، معادلات کلوسی-ویلشیر به شکل زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n_0 \dot{y} - n_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} - 2n_0 \dot{x} - n_0^2 y &= 0 \\ \ddot{z} - n_0^2 z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

### ۲-۲) معادلات کلوسی-ویلشیر همراه بایاس

معادلات کلوسی-ویلشیر تنها در زمانی که فاصله‌ی بین ماهواره‌ها خیلی کوچک باشند، مدار مرجع دایروی باشد و از اثر اغتشاشات محیطی صرف‌نظر گردد، دارای دقت قابل قبولی خواهد بود. در حالتی که چنین شرایطی در آن رعایت نشده باشد، مدل مذکور به علت مدل نکردن عوامل غیرخطی موجود، دارای دقت کمی می‌باشد. افزودن یک ترم خطی به معادلات می‌تواند وسیله‌ای برای جبران بخش‌های مدل نشده‌ی این سیستم باشد. معادلات کلوسی-ویلشیر می‌توانند با در نظر گرفتن یک ترم بایاس به صورت زیر درآیند:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n_0 \dot{y} - n_0^2 x + \beta_1 &= 0 \\ \ddot{y} - 2n_0 \dot{x} - n_0^2 y + \beta_2 &= 0 \\ \ddot{z} - n_0^2 z + \beta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

### ۳) تخمین حرکت نسبی

یکی از اهداف این مطالعه، تخمین مولفه‌های موقعیت و سرعت نسبی ماهواره‌ی پیرو نسبت به ماهواره‌ی مرجع می‌باشد. آنچه در بخش ۲ تشریح شد عبارتند از: دینامیک حاضر بر مسئله، معادلات حرکت نسبی و توصیف دستگاه‌های مختصات‌ی که حرکت دو ماهواره را در یک آرایش پرواز تشریح می‌کنند. در این بخش به مسئله‌ی تخمین پرداخته می‌شود، و یکی از روش‌های تخمین چند نقطه‌ای روش فیلتر کالمن مکعبی-کوادریچر خواهد بود که در ادامه معرفی خواهد شد.

### ۳-۱) فیلترینگ از دیدگاه بیسین

فرض کنید سیستم غیرخطی به صورت زیر باشد:

$$x_{k+1} = f(x_{k+1}, k) + G_k w_k \quad (9)$$

$$z_k = h(x_k, k) + v_k$$

بردار متغیر حالت و بردار اندازه‌گیری می‌باشد. همچنین نویز اندازه‌گیری و نویز فرایند به صورت نویز گوسی فرض شده است.

$$\begin{aligned} E\{w w^t\} &= Q \delta \\ E\{v v^t\} &= R \delta \\ E\{w v^t\} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

- محاسبه مقدار میانگین و کواریانس در مرحله‌ی پیش‌بینی

$$\hat{x}_{k+1|k} = \sum_{j=1}^{2n\hat{n}} w_j \chi_{j,k+1|k} \quad (17)$$

$$P_{k+1|k} = \sum_{j=1}^{2n\hat{n}} w_j [\chi_{j,k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}] [\chi_{j,k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}]^T + Q_k \quad (18)$$

- محاسبه مقدار میانگین و کواریانس متغیرهای حالت

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}) \quad (26)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1} P_{yy,k+1|k+1} K_{k+1}^T \quad (27)$$

در مقایسه با فیلترکالمن توسعه یافته، فیلتر ارائه شده نیاز به مشتق‌گیری، تشکیل ماتریس ژاکوبی و ماتریس حساسیت نخواهد داشت. که از دیدگاه محاسباتی یک مزیت به حساب خواهد آمد [۱۹]. در مقایسه با فیلتر گوس-هرمیت، فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر از بار محاسباتی کمتری برخوردار است، زیرا برای بکارگیری فیلتر کالمن گوس-هرمیت از مرتبه‌ی در یک مسئله با تعداد متغیر حالت، تعداد نقطه لازم است. در حالی که در فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر تعداد نقاط لازم در این حالت خواهد بود [۲۰]. همچنین برای یک مرتبه‌ی ثابت تقریب گوس-لاگر نقاط مکعبی کوادریچر و وزنه‌ای متناظر با آن نقاط، ثابت می‌باشند. بنابراین می‌توان این مقادیر را به صورت خارج از خط محاسبه و ذخیره نمود. علاوه بر آن در فیلتر کالمن بی‌بو، نقطه‌ای که در مرکز قرار می‌گیرد، دارای بالاترین وزن است. اما در فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر نقطه‌ای در میانه قرار ندارد و این امر از لحاظ ریاضیاتی برای بدست آوردن گشتاور اول و دوم آماری (تقریب میانگین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس خطای متغیرهای حالت) دارای ارجحیت می‌باشد [۲۱]. با توجه به موارد بالا و مقایسه‌های صورت گرفته در این پژوهش از یکی از مناسب‌ترین روش‌های تخمین چند نقطه‌ای به نام روش فیلتر کالمن مکعبی-کوادریچر استفاده شده است.

### ◀ ۳ مرحله به‌روزرسانی مشاهدات

- انجام جداسازی کلواسکی از خطای کواریانس

$$P_{k+1|k} = S_{k+1|k} S_{k+1|k}^T \quad (19)$$

- بدست آوردن نقاط مکعبی کوادریچر

$$\chi_{j,k+1|k} = S_{k+1|k} \xi_j + \hat{x}_{k+1|k} \quad (20)$$

- بدست آوردن پیش‌بینی اندازه‌گیری‌ها برای نقاط مکعبی کوادریچر

$$Y_{j,k+1|k} = h(\chi_{j,k+1|k}) \quad (21)$$

- تخمین اندازه‌گیری‌ها

$$\hat{y}_{k+1|k} = \sum_{j=1}^{2n\hat{n}} w_j Y_{j,k+1|k} \quad (22)$$

- محاسبه کواریانس‌ها

$$P_{yy,k+1|k} = \sum_{j=1}^{2n\hat{n}} w_j [Y_{j,k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}] [Y_{j,k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}]^T + R_k \quad (23)$$

$$P_{xy,k+1|k} = \sum_{j=1}^{2n\hat{n}} w_j [\chi_{j,k+1|k} - \hat{x}_{k+1|k}] [Y_{j,k+1|k} - \hat{y}_{k+1|k}]^T \quad (24)$$

- محاسبه بهره کالمن

$$K_{k+1} = P_{xy,k+1|k+1} P_{yy,k+1|k+1}^{-1} \quad (25)$$

### ۴ مدل اندازه‌گیری

نوع غیرخطی مشاهدات مربوط به اطلاعات راداری است، که عبارتند از: آزیموت، زاویه فراز و رنج.

$$z = [\alpha \quad \varepsilon \quad \rho]^T \quad (29)$$

که فاصله بین ماهواره اصلی و پیرو، آزیموت و زاویه فراز می‌باشد.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (30)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (31)$$

$$\varepsilon = \sin^{-1} \left( \frac{z}{\rho} \right) \quad (32)$$

در این مطالعه دو مدل اندازه‌گیری خطی و غیرخطی مورد توجه خواهد بود. در این بررسی مدل خطی ارائه شده در مسئله تخمین حالت‌های یک ماهواره، به صورت زیر می‌باشد:

$$z = [x \quad y \quad z]^T \quad (28)$$

نوع خطی مدل مشاهده، بیان‌کننده برداری خواهد بود که ماهواره اصلی را به ماهواره پیرو متصل می‌کند. به بیان دیگر، ماهواره اصلی دارای سنسورهایی است که اندازه‌گیری آن‌ها قابل تبدیل به مولفه‌های موقعیت نسبی ماهواره پیرو خواهد بود.

### ۵ الزامات مسئله و مدل‌های تخمین

شد و در ادامه به بررسی و تحلیل مسئله پرداخته می‌شود. در این مطالعه قطر بزرگ برای مدار مرجع برابر ۷۱۰۰ کیلومتر و تناوب مداری ۵۹۵۲٫۸ ثانیه (یا ۱٫۶۵۳ ساعت) در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این مطالعه شرایط ابتدایی برای شبیه‌سازی‌ها به صورت

در بخش‌های قبل معادلات حاکم بر حرکت نسبی دو ماهواره، الگوریتم تخمین و مدل‌های مشاهده مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش سعی بر بکارگیری این معادلات و مدل‌ها در یک مسئله خاص می‌باشد. در ابتدا به برخی از جوانب مسئله تخمین اشاره خواهد



در تمام تحلیل‌ها کورایانس خطای اندازه‌گیری برای مدل مشاهده خطی و غیرخطی به ترتیب زیر در نظر گرفته شده است. اگر اندازه‌گیری خطی باشد، خطا در هر محور به اندازه یک سانتی‌متر و به اندازه سانتی‌متر در رنج می‌باشد. با افزایش فاصله بین دو مدار، مقدار خطای ایجاد شده به تناسب بزرگ‌تر خواهد شد.

$$R_k = \rho [10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6}]^T m^2 \quad (36)$$

اگر اندازه‌گیری غیرخطی باشد (آزیموت، زاویه‌ی فراز و رنج) ماتریس کورایانس اندازه‌گیری به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$R_k = \begin{bmatrix} 7.6154 \times 10^{-5} \text{ rad}^2 \\ 7.6154 \times 10^{-5} \text{ rad}^2 \\ \rho \times 10^{-6} m^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

ماتریس کورایانس خطای سیستم، می‌بایست به صورتی انتخاب گردد که خطای ماندگار کاهش یابد (اختلاف مقادیر تخمین زده شده و مقادیر واقعی). هیلانی [۲۳] نشان داد که در حالتی که بازه‌های زمانی از تناوب مداری خیلی کوچک‌تر باشد ماتریس کورایانس خطای سیستم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 T^3 / 3 & 0 & 0 & \sigma_x^2 T^3 / 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 T^3 / 3 & 0 & 0 & \sigma_y^2 T^3 / 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 T^3 / 3 & 0 & 0 & \sigma_z^2 T^3 / 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_x^2 T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_y^2 T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_z^2 T \end{bmatrix} \quad (38)$$

جدول ۱ اثر عوامل غیرخطی بر مدار مرجع دایره، مدل مشاهده غیرخطی، فرکانس نمونه‌گیری یک هرتز

فاصله دو مدار ده کیلومتر			فاصله دو مدار یک کیلومتر			
مدل کلوسی همراه بایاس	مدل کلوسی	مدل سدویک	مدل کلوسی همراه بایاس	مدل کلوسی	مدل سدویک	متغیر حالت
0.871	1.65	0.879	0.084	0.121	0.036	$\delta x (m)$
0.551	0.52	0.681	0.049	0.052	0.041	$\delta y (m)$
0.814	0.59	0.614	0.073	0.066	0.043	$\delta z (m)$
5.84	11.1	2.64	0.528	0.811	0.121	$\delta v_x (mm/s)$
4.07	5.24	2.51	0.224	0.393	0.132	$\delta v_y (mm/s)$
5.70	5.52	3.63	0.284	0.484	0.159	$\delta v_z (mm/s)$

تطبیق این ماتریس پرداخت، این مقدار در هر حالت متفاوت است و به گونه‌ای تنظیم می‌گردد که خطای تخمین همواره بین مرزهای سه سیگما قرار گیرد.

در جدول ۱ میزان خطای ایجاد شده برابر با میانگین اختلاف بین مقدار واقعی و تخمین زده شده می‌باشد. مشخص است که مدل سدویک نتایج بهتری را ایجاد کرده است. چنانچه در جدول مشاهده می‌شود اختلاف چشمگیری بین نتایج حاصله از مدل سدویک و کلوسی-ویلشیر وجود دارد. این امر به علت در نظر گرفتن اغتشاشات  $\rho$  در مدل سدویک است. بر این اساس، خطاهای ایجاد شده در

زیر بیان شده است:

- دو مدار مرجع با خروج از مرکز  $e=0$  و  $e=0.005$  در نظر گرفته شده است.
- برای هر مدار مرجع، دو حالت مختلف تحلیل شده است: اندازه مدار نسبی  $\rho = 1 \text{ km}$  و  $\rho = 10 \text{ km}$
- استفاده از سه مدل دینامیکی سدویک، کلوسی-ویلشیر و کلوسی-ویلشیر همراه بایاس برای بیان حرکت نسبی ماهواره‌ها.
- استفاده از دو مدل اندازه‌گیری خطی  $[x \ y \ z]^T$  و مدل مشاهده غیرخطی  $[\alpha \ \varepsilon \ \rho]^T$
- استفاده از دو بازه‌ی زمانی بین دو مشاهده: ۱ ثانیه و ۱۰ ثانیه.
- خطای مقادیر اولیه تخمین‌گر حالت ۲ درصد مقادیر اصلی در نظر گرفته شده است، همچنین مقادیر اولیه کورایانس به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۲]:

$$P_{0|0} = \begin{bmatrix} P_{0,A} & 0 \\ 0 & P_{0,B} \end{bmatrix} \quad (33)$$

که در آن

$$P_{0,A} = \text{diag} \left( \left[ \left( \frac{0.01}{n} \right)^2 \quad \left( \frac{0.01}{n} \right)^2 \quad \left( \frac{0.01}{n} \right)^2 \right] \right) m^2 \quad (34)$$

$$P_{0,B} = \text{diag} \left( [(0.01)^2 \quad (0.01)^2 \quad (0.01)^2] \right) m^2/s^2 \quad (35)$$

که در آن  $n$  مقدار حرکت متوسط ماهواره اصلی می‌باشد.

برای ساده سازی، فرض می‌کنیم  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$  باشد، بنابراین تعداد متغیرها به یک کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان با این تغییر به تنظیم و

## ۶ نتایج

در اینجا چهار سری از نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرد:

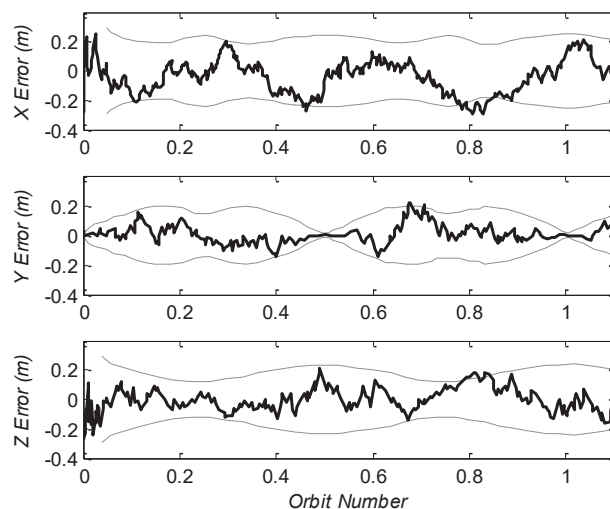
- نتایج مقایسه مدل‌های دینامیکی
- اثر جملات غیرخطی (خروج از مرکز غیر صفر) بر پاسخ تخمین‌گر
- اثر فرکانس مشاهده بر پاسخ تخمین‌گر
- اثر نویز سنسور بر پاسخ تخمین‌گر

### ۱-۶ مقایسه مدل

مدل کلوسی همراه با بایاس نیز، نتایج بهتری را نسبت به مدل کلوسی در حالت عادی ایجاد می‌نماید. بنابراین نشان می‌دهد بایاس اضافه شده قادر به جبران برخی از اثرات مدل نشده در مدل کلوسی بوده است. همچنین نشان داده شده است که با افزایش فاصله نسبی مدارها و به عبارتی افزایش عوامل غیرخطی، مدل همراه بایاس از مدل بدون بایاس پایدارتر بوده و رشد خطای کمتری داشته است. علاوه بر مقایسه میانگین خطای تخمین‌گرها، در ادامه خطاهای ایجاد شده به صورت نمودار هم نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌گردد خطاهای ایجاد شده در مرزهای سه سیگما باقی می‌ماند.

شکل ۱ و ۲ خطای تخمین‌گر را برای مدار مرجع دایره و با مدل اندازه‌گیری غیرخطی به نمایش گذاشته است. همچنین در شکل ۳ و ۴ خطای ایجاد شده برای شرایط قبلی و با استفاده از مدل سدویک نشان داده شده است. چنانچه مشخص است میزان خطاهای موقعیت به اندازه ۵۰٪ کاهش یافته است.

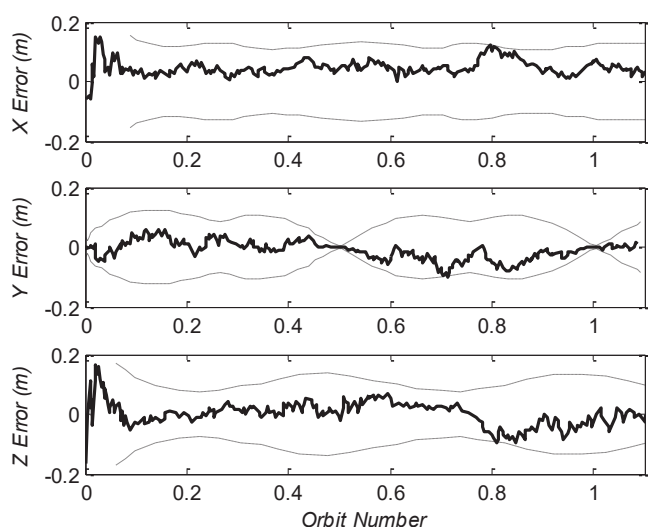
جهت شعاعی که بیشتر تحت اثر اغتشاش  $J_2$  می‌باشد، بیشترین اختلاف‌ها را نشان می‌دهد. همچنین با افزایش عوامل غیرخطی یا با افزایش زمان این اختلافات بیشتر خواهد شد. به علاوه معادله کلوسی-ویلشیر به خاطر در نظر نگرفتن اثرات غیرخطی و اغتشاشی به طور ذاتی برای پروازهایی با مدت زمان طولانی نامعتبر می‌باشد.



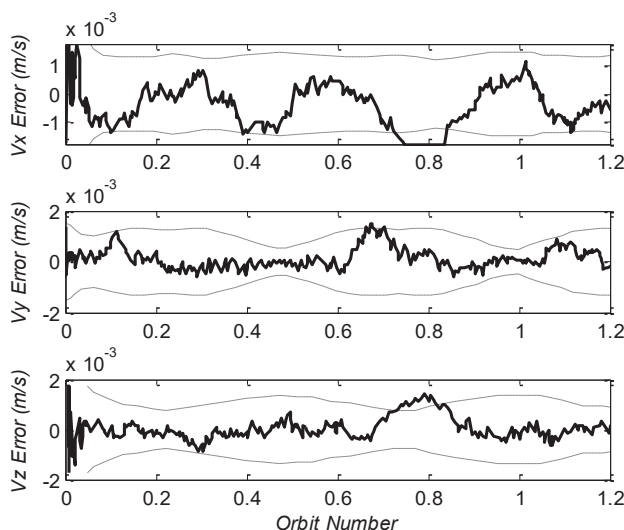
شکل ۳ خطای تخمین موقعیت برای یک مدار مرجع دایروی مدل کلوسی، فاصله نسبی یک کیلومتر

جدول ۲ اثر عوامل غیرخطی بر مدار مرجع بیضوی. مدل مشاهده غیرخطی، فرکانس نمونه‌گیری یک هرتز

فاصله دو مدار ده کیلومتر			فاصله دو مدار یک کیلومتر			متغیر حالت
مدل کلوسی همراه بایاس	مدل کلوسی	مدل سدویک	مدل کلوسی همراه بایاس	مدل کلوسی	مدل سدویک	
1.189	1.61	0.868	0.084	0.111	0.042	$\delta x$ (m)
0.751	1.01	0.449	0.049	0.107	0.046	$\delta y$ (m)
1.065	1.19	0.792	0.073	0.099	0.055	$\delta z$ (m)
7.84	11.2	2.74	1.008	0.917	0.104	$\delta v_x$ (mm/s)
5.97	6.54	2.04	0.539	0.678	0.132	$\delta v_y$ (mm/s)
5.04	7.76	3.33	0.411	0.984	0.163	$\delta v_z$ (mm/s)

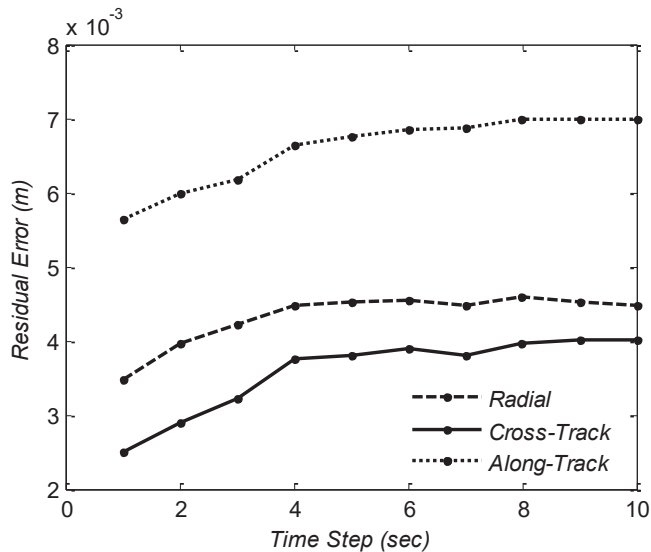


شکل ۵ خطای تخمین موقعیت برای یک مدار مرجع دایروی مدل سدویک، فاصله نسبی یک کیلومتر

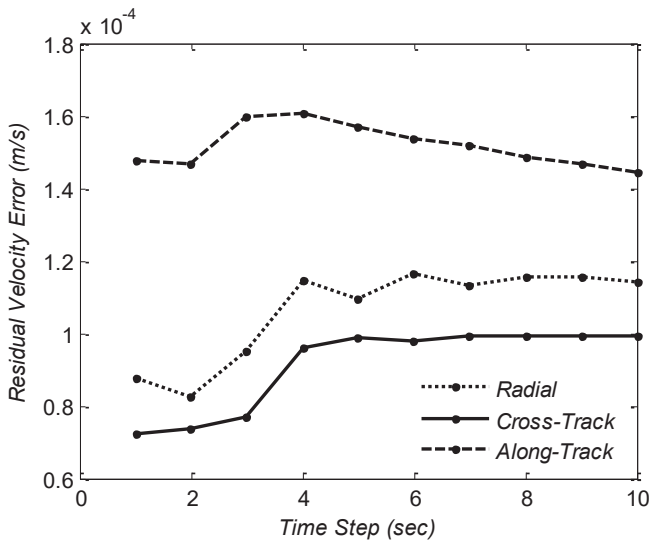


شکل ۴ خطای تخمین سرعت برای یک مدار مرجع دایروی مدل کلوسی، فاصله نسبی یک کیلومتر

با افزایش مدت زمان بین مشاهدات، دقیق بودن مدل دینامیکی از اهمیت بالاتری برخوردار می‌شود. در فرآیند تخمین، عمل اصلاح مدل دینامیکی در هر بار ورود مشاهدات جدید انجام می‌شود. بنابراین اگر تخمین‌گر هر یک ثانیه اصلاح شود، دقت مدل دینامیکی اهمیت کمتری پیدا می‌کند و تأثیر کمتری بر خطای ایجاد شده دارد. به همین ترتیب اگر تخمین‌گر هر ۱۰ ثانیه یکبار اصلاح شود، اثرات ساده‌سازی مدل دینامیکی بیشتر ظاهر شده و خطاهای ایجاد شده بزرگ‌تر می‌گردد.

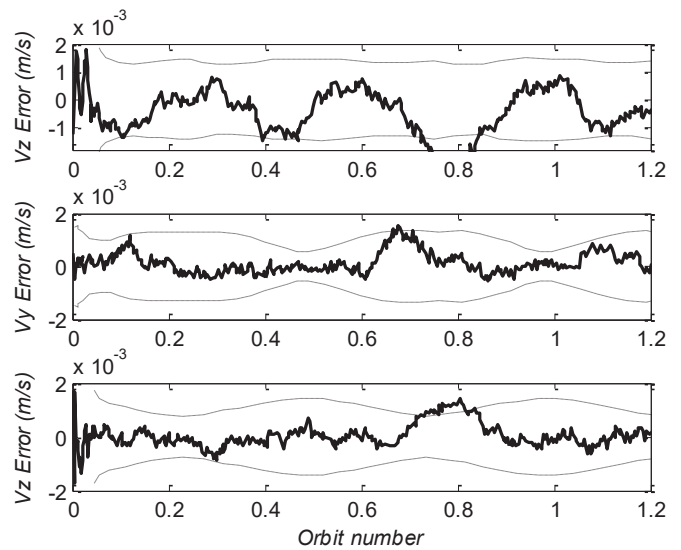


شکل ۷ وابستگی میزان خطای تخمین موقعیت به فرکانس مشاهده



شکل ۸ وابستگی میزان خطای تخمین سرعت به فرکانس مشاهده

بر اساس مشاهدات صورت گرفته از شکل ۷ و ۸، فرکانس ورود مشاهدات جدید تأثیر بزرگی بر روی خطاهای تخمین‌گر خواهد داشت. با بزرگ شدن فرکانس مشاهده، خطاهای تخمین‌گر افزایش می‌یابد. خطای مولفه در جهت حرکت موقعیت بزرگ‌تر از خطای مولفه‌ی شعاعی موقعیت می‌باشد.



شکل ۶ خطای تخمین سرعت برای یک مدار مرجع دایروی مدل سدویک، فاصله نسبی یک کیلومتر

## ۲-۶) اثر خروج از مرکز

بکارگیری یک مدار مرجع بیضوی باعث افزایش عوامل غیرخطی می‌شود. مقدار خروج از مرکز برای مدار مرجع ۰٫۰۰۵ در نظر گرفته می‌شود که مدار مرجع را نزدیک به مدار دایره‌ای نگه می‌دارد. از مقایسه نتایج موجود در جدول ۱ و ۲ مشخص است که خطاهای موقعیت افزایش یافته است و همچنین خطاهای سرعت نیز تقریباً دو برابر شده است. در جدول ۲ اطلاعات مربوط به مدار نسبی به فاصله‌ی یک و ده کیلومتر را برای یک مدار مرجع بیضوی نشان می‌دهد.

چنانچه مشاهده می‌شود با بزرگ‌تر شدن فاصله‌ی نسبی مدارها، مقدار خطاها به طرز قابل توجهی افزایش خواهد یافت. متغیرهای در جهت حرکت و خارج از صفحه حساسیت بیشتری نسبت به مولفه شعاعی در ازای افزایش عوامل غیرخطی در فرآیند تخمین را از خود نشان می‌دهند.

با مقایسه جدول ۱ و ۲ مشاهده می‌گردد که با افزایش خروج از مرکزیت مدار مرجع، خطای مولفه‌های موقعیت و سرعت اندکی افزایش یافته است. با وجود اینکه با خروج از مرکزیت بسیار کوچک، تغییر زیادی در نتایج حاصل نشده اما با افزایش کوچکی در خروج از مرکز مقدار خطاها بسیار بزرگ می‌گردند.

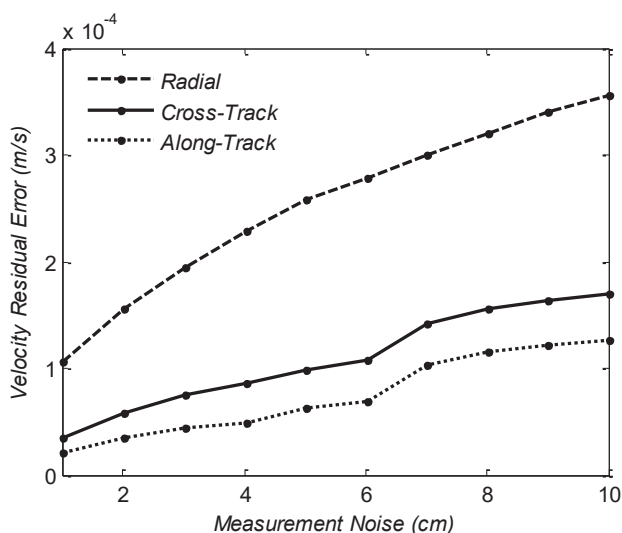
## ۳-۶) رابطه‌ی خطا و فاصله زمانی بین دو مشاهده

در این بخش مطالعه‌ای در مورد تغییر بازه‌های زمانی مابین داده‌گیری از سنسور صورت می‌گیرد. بازه‌های مشاهده در فاصله‌ی زمانی ۱ تا ۱۰ ثانیه و با جهش‌های یک ثانیه‌ای صورت می‌گیرد. نویز اندازه‌گیری به میزان ثابت یک سانتی‌متر برای مدل خطی در نظر گرفته شده است. معادلات بکار گرفته شده برای سیستم و مشاهده خطی می‌باشد.



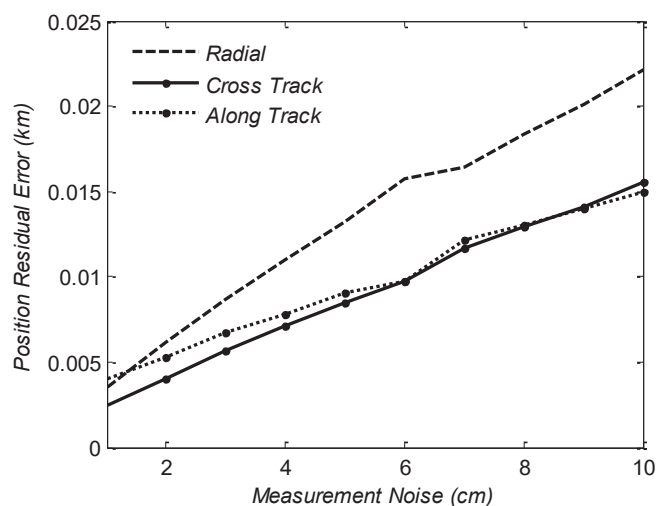
## ۶-۴) رابطه‌ی خطا و نویز اندازه‌گیری

بزرگ‌تر خواهد شد. تغییرات خطای ایجاد شده برای تخمین موقعیت به صورت خطی و برای تخمین مولفه‌های سرعت به صورت غیرخطی افزایش یافته است. به علاوه، نرخ افزایش خطا در مولفه‌های شعاعی سرعت و موقعیت نسبت به جهات دیگر بزرگ‌تر می‌باشد.



شکل ۱۰ وابستگی میزان خطای تخمین سرعت به نویز اندازه‌گیری

در بخش پایانی پارامترهای مربوط به معادلات حرکت نسبی ثابت می‌ماند و نویز اندازه‌گیری تغییر می‌کند. این مطالعه می‌تواند مربوط به تاثیر دقت سنسورهای بکار گرفته شده بر عمل تخمین باشد. در شکل ۹ و ۱۰ مشاهدات جدید هر یک ثانیه یکبار به تخمین‌گر وارد می‌شود. هرچه نویز اندازه‌گیری افزایش یابد، خطای تخمین‌گر



شکل ۹ وابستگی میزان خطای تخمین موقعیت به نویز اندازه‌گیری

## ۷) نتیجه‌گیری

- بخشی از این مطالعه به امکان افزودن ترم بایاس برای جبران بخش‌های مدل نشده در مدل دینامیکی کلوسی ویلشیر اختصاص داشت. نتایج حاصله نشان می‌دهند که افزودن این ترم تا حدودی قادر به جبران اثرات مدل نشده می‌باشد. بیشترین تاثیر ترم بایاس در خطاهای ایجاد شده در مولفه‌ی شعاعی موقعیت و سرعت، نمایان بود. این امر به این علت است که مهم‌ترین عامل اغتشاشی یعنی ترم  $L_2$  بیشترین تاثیر را بر مولفه‌ی شعاعی خواهد داشت. با این حال این بایاس اضافه شده همیشه افزایش دقت نتایج تخمین‌گر را تضمین نمی‌کند.
- اثر فرکانس اندازه‌گیری سنسور و خطای سنسور نیز برای خطای ایجاد شده توسط تخمین‌گر مورد مطالعه قرار گرفت. دیده شد که با افزایش فرکانس اندازه‌گیری، تعداد مراحل بروز رسانی در زیرسیستم فیلترینگ کاهش یافته و خطای ایجاد شده تخمین‌گر افزایش خواهد یافت.

- در این مطالعه تخمین مولفه‌های سرعت و موقعیت نسبی ماهواره توسط ماهواره مرجع با بکارگیری الگوریتم فیلتر کالمن مکعبی کوادریچر مورد بررسی قرار گرفت. همچنین اثر پارامترهایی مانند نوع مدل دینامیک نسبی، الگوریتم فیلترینگ، نوع خطی و غیرخطی مدل مشاهده‌گر و خطای ابزارهای اندازه‌گیری در مسئله تخمین مورد ارزیابی و آنالیز قرار گرفت. به این منظور چندین سناریو، در بخش‌های قبل شبیه‌سازی شد و نتایج حاصله به نمایش درآمد. بر این اساس یک سری از مشاهدات بدست آمد، که عبارتند از:
  - همانطور که انتظار می‌رفت مدل سدویک بهترین مدل برای انجام تخمین در مدارهای مرجع دایره می‌باشد. مدل سدویک برای مدار مرجع دایره استخراج شده است و اثرات اغتشاشی وارد بر مدار ماهواره را نیز شامل می‌شود. در صورتی که مدل‌های دیگر اثرات اغتشاشی بر ماهواره پیرو را در نظر نمی‌گیرند. گرچه، برای یک مساله خاص با فاصله نسبی کوچک و بازه‌های زمانی کوتاه در مشاهدات، خطاهای ایجاد شده از مدل کلوسی ویلشیر با مدل سدویک قابل قیاس خواهد بود.

- [1] K. Baek and H. Bang, "Adaptive sparse grid quadrature filter for spacecraft relative navigation," *Acta Astronaut.*, vol. 87, pp. 2013, 106–96.
- [2] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "Unscented filtering and nonlinear estimation," *Proc. IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 2004, 422–401.
- [3] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new approach for filtering nonlinear systems," in *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, 1995, vol. 3, pp. 1632–1628.
- [4] K. Ito and K. Xiong, "Gaussian filters for nonlinear filtering problems," *Autom. Control. IEEE Trans.*, vol. 45, no. 5, pp. 2000, 927–910.
- [5] I. Arasaratnam and S. Haykin, "Cubature kalman filters," *Autom. Control. IEEE Trans.*, vol. 54, no. 6, pp. 2009, 1269–1254.
- [6] S. J. Julier, "The spherical simplex unscented transformation," in *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, 2003, vol. 3, pp. 2434–2430.
- [7] J. G. C. Lozano, L. R. G. Carrillo, A. Dzul, and R. Lozano, "Spherical simplex sigma-point Kalman filters: a comparison in the inertial navigation of a terrestrial vehicle," in *American Control Conference, 2008*, 2008, pp. 3541–3536.
- [8] S. Bhaumik, "Cubature quadrature Kalman filter," *Signal Process. IET*, vol. 7, no. 7, pp. 2013, 541–533.
- [9] M. Bakhtiari, K. Daneshjou, and E. Abbasali, "A new approach to derive a formation flying model in the presence of a perturbing body in inclined elliptical orbit: relative hovering analysis," *Astrophys. Space Sci.*, vol. 362, no. 2, p. 2017, 36.
- [10] M. Bakhtiari, K. Daneshjou, and M. Fakoor, "Relative hovering analysis about an elliptical perturbed orbit with consideration of dynamic air drag and oblate earth," *Aerosp. Sci. Technol.*, 2017.
- [11] W. H. Clohessy, "Terminal guidance system for satellite rendezvous," 2012.
- [12] T. E. Carter, "State transition matrices for terminal rendezvous studies: brief survey and new example," *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 21, no. 1, pp. 1998, 155–148.
- [13] S. Schweighart and R. Sedwick, "A perturbative analysis of geopotential disturbances for satellite cluster formation flying," in *Aerospace Conference, 2001, IEEE Proceedings.*, 2001, vol. 2, pp. 1001–2.
- [14] M. Sabatini and G. B. Palmerini, "Linearized formation-flying dynamics in a perturbed orbital environment," in *Aerospace Conference, 2008 IEEE*, 2008, pp. 13–1.
- [15] J. A. Roberts and P. C. E. Roberts, "The development of high fidelity linearized J2 models for satellite formation flying control," 2005.
- [16] D. Izzo, M. Sabatini, and C. Valente, "A new linear model describing formation flying dynamics under J2 effects," in *Proceeding of the XVII AIDAA congress. Rome*, 2003.
- [17] H. Shaub and J. Junkins, "Analytical Mechanics of Space Systems, American Institute of Aeronautics and Astronautics," Inc., Reston, VA, 2003.
- [18] C. Wei, S.-Y. Park, and C. Park, "Linearized dynamics model for relative motion under a J<sup>-2</sup> perturbed elliptical reference orbit," *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 55, pp. 2013, 69–55.
- [19] R. Radhakrishnan, A. K. Singh, S. Bhaumik, and N. K. Tomar, "IMM-cubature quadrature Kalman filter for manoeuvring target tracking," in *Signal Processing, Informatics, Communication and Energy Systems (SPICES), 2015 IEEE International Conference on*, 2015, pp. 5–1.
- [20] A. K. Singh and S. Bhaumik, "Higher degree cubature quadrature kalman filter," *Int. J. Control. Autom. Syst.*, vol. 13, no. 5, pp. 2015, 1105–1097.
- [21] A. K. Singh and S. Bhaumik, "Tracking of Low earth orbit satellite using cubature quadrature Kalman filter," in *Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 2014 IEEE International Symposium on*, 2014, pp. 118–114.
- [22] J. R. Carpenter and K. T. Alfriend, "Navigation accuracy guidelines for orbital formation flying," *J. Astronaut. Sci.*, vol. 53, no. 2, p. 2005, 207.
- [23] H. B. Hablani, M. L. Tapper, and D. J. Dana-Bashian, "Guidance and relative navigation for autonomous rendezvous in a circular orbit," *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 25, no. 3, pp. 2002, 562–553.